PROBLÈMES · REPÈRES ET MÉTHODES

Problèmes : analyse et convergence

CORRIGÉ · Démarches et réponses

1 Une réserve

Le point fixe est 30. En posant v(n)=u(n)-30, on obtient v(n+1)=0,8v(n), donc u(n)=30-20×0,8^n. La suite croît vers 30. Il faut 0,8^n<0,05, soit n>ln(0,05)/ln(0,8)≈13,43. Le premier rang est 14 ; les distances aux rangs 13 et 14 valent environ 1,10 et 0,88.

2 Un pic

f'(x)=(1-x)exp(-x) : maximum 1/e en x=1 ; limite 0 en +∞. f''(x)=(x-2)exp(-x) change de signe en 2 : inflexion en (2;2/e²). F(x)=-(x+1)exp(-x) est une primitive. L'aire positive vaut F(2)-F(0)=1-3/e², environ 0,594.

3 Une racine unique

La fonction est continue, de dérivée 3x²+1>0, et ses limites sont -∞ et +∞ : une seule racine. f(0,682)≈-0,000785432 et f(0,683)≈0,001611987, donc la racine est dans [0,682;0,683]. Une dichotomie sur [0;1] conserve les signes opposés et s'arrête quand la largeur est au plus 0,001.

Problèmes : analyse et convergence

CORRIGÉ · Démarches et réponses

4 Un refroidissement

T(t)=20+60exp(-0,2t). La limite est 20 et la température décroît. T(t)<25 équivaut à exp(-0,2t)<1/12, puis t>5ln(12)≈12,42 unités de temps. À l'égalité, T vaut exactement 25 ; le passage strict sous 25 a lieu après cet instant.

5 Une aire entre courbes

2x-x²=x(2-x)≥0 sur [0;2]. L'aire vaut [x²-x³/3] de 0 à 2, soit 4/3. La moyenne vaut (4/3)/2=2/3. Résoudre 2x-x²=2/3 donne (x-1)²=1/3, donc x=1-1/√3 ou x=1+1/√3, toutes deux dans [0;2].

6 Une inégalité utile

h'(x)=1-1/x, négative avant 1 puis positive après. Le minimum vaut h(1)=0. Pour x=1+1/n, on obtient ln(1+1/n)≤1/n. Multiplier par n puis appliquer exp donne (1+1/n)^n≤e. Cette seule majoration ne démontre ni convergence ni limite égale à e ; il faut un argument supplémentaire.