SUITES · REPÈRES ET MÉTHODES

Récurrence : rédiger et démontrer

ÉTAPE 1 · Distinguer les étapes

Prénom : ..... Date : .....

1 Une somme

Calcule les sommes 1 + 3 + ... + (2n - 1) pour n = 1, 2, 3, 4. Conjecture une formule.

Démontre-la par récurrence pour n ≥ 1 : initialisation, hypothèse, hérédité et conclusion.

Explique pourquoi vérifier quatre valeurs ne suffit pas.

2 Une divisibilité

Démontre que 3^n - 1 est divisible par 2 pour tout entier n ≥ 0.

Écris 3^(n+1) - 1 en fonction de 3^n - 1. Quel rôle joue l'hypothèse de récurrence ?

Propose aussi une preuve utilisant la parité.

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.

Récurrence : rédiger et démontrer

ÉTAPE 2 · Encadrer une suite

Prénom : ..... Date : .....

3 Un intervalle stable

Soit u(0) = 1 et u(n+1) = √(2 + u(n)). Prouve par récurrence que 1 ≤ u(n) ≤ 2.

Précise pourquoi la racine est toujours définie. Représente la fonction de récurrence et l'intervalle.

4 Une croissance

Pour la même suite, prouve u(n+1) ≥ u(n), d'abord au rang 0 puis par récurrence.

Explique comment la croissance de la fonction racine permet l'hérédité.

Conclure à la convergence exige-t-il une autre propriété ? Nomme-la.

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.

SUITES · REPÈRES ET MÉTHODES

Récurrence : rédiger et démontrer

ÉTAPE 3 · Diagnostiquer et renforcer

Prénom : ..... Date : .....

5 Une preuve incomplète

Un élève vérifie u(0) ≤ 2 puis affirme que tous les termes sont ≤ 2. Quelle étape manque ?

Un autre suppose la propriété au rang n+1 pour prouver le rang n+1 : explique le raisonnement circulaire.

Rédige une version correcte pour u(0) = 0 et u(n+1) = (u(n)+3)/2.

6 Une formule explicite

Pour u(0) = 2 et u(n+1) = 3u(n) + 4, conjecture puis démontre u(n) = 4×3^n - 2.

Vérifie la formule aux trois premiers rangs. Utilise-la pour établir u(n) ≥ 2.

Explique la différence entre définir une suite par récurrence et raisonner par récurrence.

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.