PROBABILITÉS · RÉVISION DES ACQUIS

Sommes, concentration et grands nombres

ÉTAPE 1 · Relier exact et majoré

Prénom : ..... Date : .....

1 Somme de Bernoulli

X compte les succès de 200 essais indépendants de paramètre 0,3.

Calcule moyenne et variance de X puis de X/200.

2 Une borne peu informative

Une variable a variance 100. Tchebychev est appliqué avec un écart de 2.

Calcule la borne obtenue et explique pourquoi on la remplace au besoin par 1.

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.

Sommes, concentration et grands nombres

ÉTAPE 2 · Choisir une précision

Prénom : ..... Date : .....

3 Précision sans connaître p

Trouve n tel que la fréquence de n Bernoulli indépendantes soit à moins de 0,02 de p avec probabilité au moins 0,95 selon Tchebychev.

Utilise $p(1-p) \leq 1/4$ et arrondis n dans le bon sens.

4 Comparer deux garanties

Pour une moyenne de variance 9/n, calcule les bornes sur un écart d'au moins 1 avec n=100 puis n=1 000.

Combien faut-il multiplier n pour diviser la borne par dix ?

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.

Sommes, concentration et grands nombres

ÉTAPE 3 · Comprendre la loi des grands nombres

Prénom : ..... Date : .....

5 Convergence en probabilité

À partir de $V(\text{moyenne})=\sigma^2/n$, montre que la probabilité d'un écart d'au moins $\varepsilon>0$ tend vers 0.

Explique pourquoi cela ne signifie pas égalité exacte avec l'espérance à partir d'un certain rang.

6 Une simulation dépendante

On tire une seule Bernoulli Z, puis on pose $X1=...=Xn=Z$.

Calcule la moyenne et sa variance. Pourquoi augmenter n n'améliore-t-il pas la précision ici ?

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.