PROBABILITÉS · REPÈRES ET MÉTHODES

Sommes, concentration et grands nombres

ÉTAPE 1 · Additionner des variables

Prénom : ..... Date : .....

1 Espérances

X et Y ont pour espérances 4 et -1. Calcule E(3X - 2Y + 5).

Faut-il supposer l'indépendance ? Explique. Donne un exemple de variables dépendantes où la relation reste vraie.

2 Variances

X et Y sont indépendantes, de variances 9 et 4. Calcule V(X+Y), V(2X-Y) et les écarts types correspondants.

Que peut-on encore affirmer sans indépendance ? Teste le cas Y = X pour montrer une limite de la formule.

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.

Sommes, concentration et grands nombres

ÉTAPE 2 · Étudier une moyenne

Prénom : ..... Date : .....

3 Moyenne d’échantillon

X1,...,Xn sont indépendantes, de même loi, moyenne m et variance σ². Pour M = (X1+...+Xn)/n, calcule E(M) et V(M).

Déduis son écart type. Par quel facteur augmente n pour diviser l’écart type par 2 ?

4 Une mesure répétée

Une mesure fictive a une moyenne de 10 et un écart type de 2. On moyenne 25 mesures indépendantes.

Calcule moyenne et écart type de cette moyenne. Recommence avec 100 mesures.

Quelle hypothèse pourrait être fausse si toutes les mesures partagent un même défaut de calibration ?

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.

PROBABILITÉS · REPÈRES ET MÉTHODES

Sommes, concentration et grands nombres

ÉTAPE 3 · Encadrer une probabilité

Prénom : ..... Date : .....

5 Bienaymé-Tchebychev

On admet $P(|X-E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$ pour $a > 0$. Applique à $E(X)=50$ et $V(X)=9$, avec $a = 6$ puis 10.

Interprète les bornes. Une borne supérieure dépassant 1 fournit-elle une information utile ?

6 Loi des grands nombres

Pour des Bernoulli indépendantes de paramètre p, la fréquence F a pour variance $p(1-p)/n$.

Utilise $p(1-p) \leq 1/4$ pour majorer $P(|F-p| \geq 0,05)$.

Trouve n suffisant pour que cette borne soit au plus 0,05. Explique pourquoi ce seuil suffisant n'est pas forcément minimal.

Notation : ^ indique une puissance ; u(n) désigne le terme de rang n.